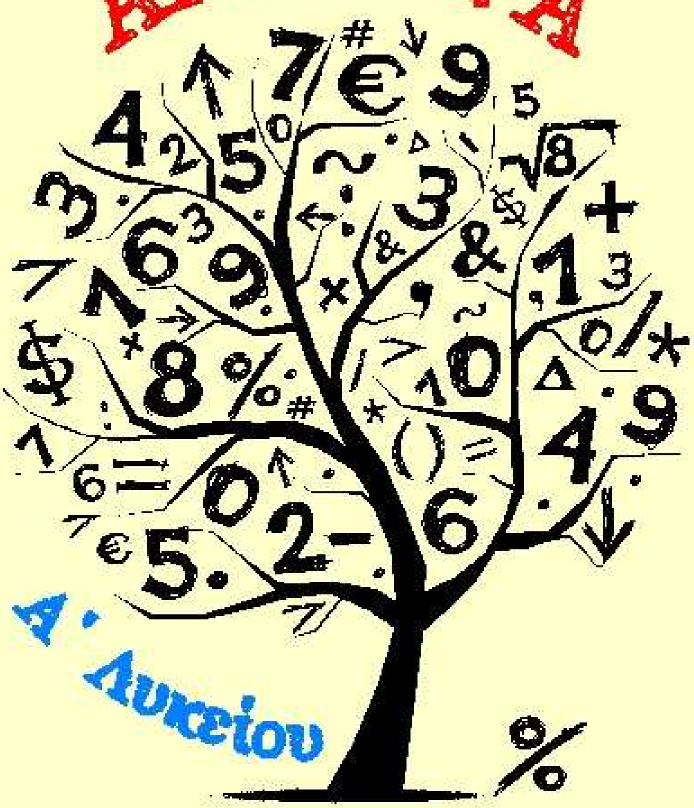
ΑΛΓΕΒΡΑ



Α΄ Λυκείου

ΕΚΔΟΣΗ ΤΟΥ 3ου ΓΕΛ ΞΑΝΘΗΣ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016
ΧΟΡΗΓΙΑ ΤΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ
ΓΟΝΕΩΝ ΚΑΙ ΚΗΔΕΜΟΝΩΝ

Π ρ ό λ ο γ ο ς

- Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με στόχο την πληρέστερη προετοιμασία των μαθητών μας.

- Περιέχει συνοπτική θεωρία ,πρωτότυπες ασκήσεις αλλά και θέματα εξετάσεων των τελευταίων ετών του σχολείου μας.

- Ελπίζουμε να αποτελέσει χρήσιμο εγχειρίδιο και για αρκετούς συναδέλφους.

- Φιλοδοξούμε να διευρύνουμε αυτή την προσπάθεια και σε άλλους τομείς.

- Ευχαριστούμε το Σύλλογο Γονέων και Κηδεμόνων για τη χρηματοδότηση της έκδοσης.

Οι μαθηματικοί του 3ου ΓΕΛ ΞΑΝΘΗΣ

Γενική επιμέλεια: Μπαρακλιανός Γ.
Φλώρου Κ.

Τυπογραφικές διορθώσεις: Βουρνίτης Γ.
Μπαρακλιανός Γ.
Τζεμπραϊλίδου Ε.

Φιλολογική επιμέλεια : Περπερίδου Α.

Θ ε ω ρ ί α

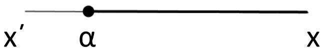
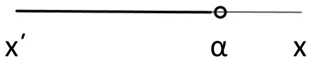
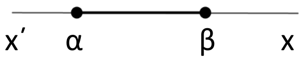
Ο Ι Π Ρ Α Ξ Ε Ι Σ Κ Α Ι Ο Ι Ι Δ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ Τ Ο Υ Σ

- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta)$
- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\cdot(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$
- $\alpha\cdot\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$
- $\alpha\cdot\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad \beta \neq 0$

Δ Ι Α Τ Α Ξ Η Π Ρ Α Γ Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν Α Ρ Ι Θ Μ Ω Ν

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$
- α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$
- α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$
- $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \Re$.
- $\alpha^2 = 0$ μόνο αν $\alpha = 0$.
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.
- Για θετικούς αριθμούς α, β και για ν θετικό ακέραιο ισχύει:
  $\alpha^\nu > \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha > \beta$.
- Αν α, β είναι ομόσημοι αριθμοί, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$.

-

Διάστημα	Ανισότητα	Συμβολισμός
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$

Α Π Ο Λ Υ Τ Η   Τ Ι Μ Η

- $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha < 0 \end{cases}$
- $|\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| = |-\alpha|$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$
- $|\alpha| \geq \alpha$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ για $\beta \neq 0$.
- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \quad ή \quad x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \quad ή \quad x = -\alpha$
- Αν $\rho > 0$, τότε $\begin{cases} |x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho \\ |x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad ή \quad x > \rho \end{cases}$
- $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$
- $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$
- $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \quad ή \quad x > x_0 + \rho$

Ρ Ι Ζ Ε Σ   Π Ρ Α Γ Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν   Α Ρ Ι Θ Μ Ω Ν

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt{\alpha}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$.
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$.
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$.
- Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε ισχύουν:

  α) $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

  β) $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}, \quad \beta \neq 0.$

  γ) $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

  δ) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$

  ε) $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

- Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Ε Ξ Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ   1ου   Β Α Θ Μ Ο Υ

- $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$
  - Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
  - Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
  - Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, τότε η εξίσωση είναι αόριστη.

-

Η εξίσωση $x^{\nu} = a$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \Re$			
ν άρτιος		ν περιττός	
α>0	α<0	α>0	α<0
$x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$	Αδύνατη	$x = \sqrt[\nu]{\alpha}$	$x = -\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

Ε Ξ Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ 2^{ου} Β Α Θ Μ Ο Υ

- $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (\alpha,\beta,\gamma\in\Re$ και $\alpha\neq 0) \qquad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$
  - Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta=0$, τότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή $x_1=x_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta<0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (\alpha\neq 0)$ έχει δύο ρίζες άνισες

  x_1, x_2, τότε: $x_1+x_2=S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

  $$x_1\cdot x_2=P=\frac{\gamma}{\alpha}$$
- Μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού με άθροισμα ριζών S και γινόμενο P είναι η :

  $$x^2-Sx+P=0$$

- Παραγοντοποίηση του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad (\alpha\neq 0)$
  - Αν $\Delta>0$, τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

    (x_1, x_2 είναι οι ρίζες του)
  - Αν $\Delta=0$, τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
  - Αν $\Delta<0$, τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

Α Ν Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ 1^{ου} Β Α Θ Μ Ο Υ

- $\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow \alpha x>-\beta$
  - Αν $\alpha>0$, τότε $x>-\dfrac{\beta}{\alpha}$
  - Αν $\alpha<0$, τότε $x<-\dfrac{\beta}{\alpha}$
  - Αν $\alpha=0$, τότε η ανίσωση γίνεται $\qquad 0\cdot x>-\beta$

$$\begin{cases} \text{αν} \quad \beta>0, \quad \text{η ανίσωση αληθεύει για κάθε } x\in\Re \\ \text{αν} \quad \beta\leq 0, \quad \text{η ανίσωση είναι αδύνατη} \end{cases}$$

Α Ν Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ 2ου Β Α Θ Μ Ο Υ

- Πρόσημο τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$
  - Αν $\Delta>0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του α	0	Ετερόσημο του α	0	Ομόσημο του α

  - Αν $\Delta=0$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του α	0	Ομόσημο του α

  - Αν $\Delta<0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	Ομόσημο του α

Α Κ Ο Λ Ο Υ Θ Ι Ε Σ

- Α ρ ι θ μ η τ ι κ ή π ρ ό ο δ ο ς

α) $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$

β) $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega$

γ) $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega]$

δ) α,β,γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

- Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ή π ρ ό ο δ ο ς

α) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\lambda$

β) $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$

γ) $S_\nu=\alpha_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$ για $\lambda\neq 1$.

δ) α,β,γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$.

Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

- Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

- Εύρεση του πεδίου ορισμού
  - $f(x)=\dfrac{1}{A(x)}$, πρέπει $A(x)\neq 0$.
  - $f(x)=\sqrt{A(x)}$, πρέπει $A(x)\geq 0$.
  - $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{A(x)}}$, πρέπει $A(x)>0$.

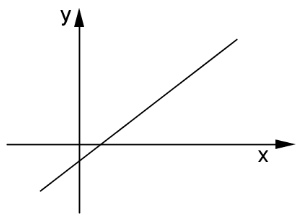
Γ Ρ Α Φ Ι Κ Η   Π Α Ρ Α Σ Τ Α Σ Η   Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Η Σ

- Θεωρούμε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ του συστήματος συντεταγμένων.
  - Το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα y΄y είναι το $M_1(-\alpha,\beta)$.
  - Το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα x΄x είναι το $M_2(\alpha,-\beta)$.
  - Το συμμετρικό του M ως προς το Ο(0,0) είναι το $M_3(-\alpha,-\beta)$.
  - Το συμμετρικό του M ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης}$ – $3^{ης}$ γωνίας του συστήματος συντεταγμένων είναι το $M_4(\beta,\alpha)$.

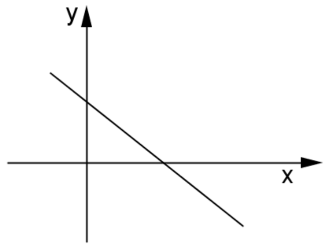
- Το σύνολο των σημείων $M(x,f(x)), x\in A$ (όπου A το πεδίο ορισμού της f) του συστήματος συντεταγμένων λέγεται γραφική παράσταση (C_f) της f .

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x) = αx+β

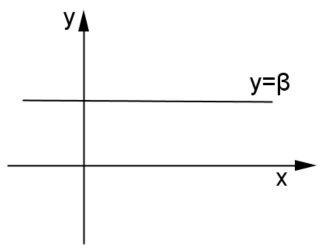
- Αν παρασταθεί γραφικά, είναι ευθεία.
- Γραφική παράσταση
  - ➢ α>0



  - ➢ α<0

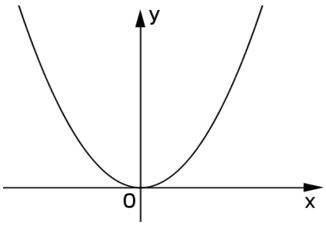


  - ➢ α=0

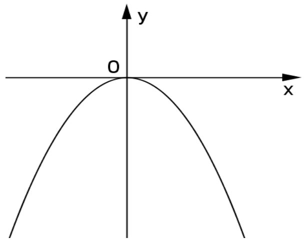


- Η $y = \alpha x + \beta$, αν παρασταθεί γραφικά τέμνει τον y΄y στο σημείο $A(0,\beta)$.
- Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ $(\beta_1 \neq \beta_2)$
  - ➢ Είναι παράλληλες, αν $\alpha_1 = \alpha_2$.
  - ➢ Είναι κάθετες, αν $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.
  - ➢ Τέμνονται, αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x^2$ $(\alpha \neq 0)$



- Η γραφική της παράσταση είναι παραβολή.
- Αν $\alpha > 0$, το γράφημα της φαίνεται στο σχήμα και ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

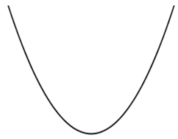


- Αν $\alpha < 0$, το γράφημα της φαίνεται στο σχήμα και ισχύει ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \Re$.
- Κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $O(0,0)$.
- Ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής της παράστασης.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$

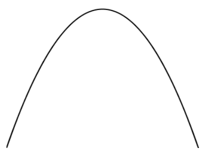
- Η γραφική της παράσταση είναι παραβολή.
- Έχει πάντα κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.
- Η ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι ο άξονας συμμετρίας της καμπύλης της.
- Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$, τα σημεία τομής της θα είναι τα $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
- Η καμπύλη της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, \gamma)$.

- Αν $\alpha > 0$, το γράφημά της έχει τη μορφή του σχήματος και ισχύει ότι $f(x) \in \left[-\dfrac{\Delta}{4\alpha}, +\infty\right)$, ενώ η συμπεριφορά της απεικονίζεται στον παρακάτω πίνακα:



x	$-\infty$		$-\dfrac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\underset{\min}{\dfrac{-\Delta}{4\alpha}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Αν $\alpha < 0$, το γράφημα της έχει τη μορφή του σχήματος_και ισχύει ότι $f(x) \in \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right]$, ενώ η συμπεριφορά της_απεικονίζεται στον παρακάτω πίνακα:



x	$-\infty$		$-\dfrac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\underset{\max}{\dfrac{-\Delta}{4\alpha}}$	$\searrow$	$-\infty$

Α σ κ ή σ ε ι ς

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Αν x πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει: $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει: αν $\alpha\gamma = \beta\gamma$, τότε $\alpha = \beta$.

γ) Αν x φυσικός αριθμός μικρότερος του 4, ώστε $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \neq 0$, τότε $x = 3$.

δ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x, y \neq 0$ ισχύει ότι $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} = \dfrac{y}{x}$.

ε) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει $(2\alpha - 1)^3 = 2\alpha^3 - 3(2\alpha)^2 + 6\alpha - 1$.

2. Έστω $A = \left[\left(\dfrac{x}{y^{-2}}\right)^3 : \dfrac{1}{x}\right] \cdot \left(\dfrac{y^{-2}}{x^3}\right)^{-2}$ με $x = 2$ και $y = \dfrac{1}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + 1} = A$.

γ) Να αποδείξετε ότι: **i)** $(\alpha + 1) \cdot (\alpha - 1) - \alpha^2 + A = 0$,

ii) $1001 \cdot 999 - 10^6 + A = 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι τα τετράγωνα με πλευρές 2Α και Α αντίστοιχα έχουν διαφορά περιμέτρων ίση με 4Α .

3. α) Αν x ακέραιος και x^2 περιττός, τότε και ο x είναι περιττός.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος ω, ώστε οι αριθμοί $\omega^2 + \omega$ και $\dfrac{1}{\omega}$ να είναι αντίστροφοι.

4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β με $\beta \neq 0$,
αν $\frac{\alpha}{\beta} < 0$, τότε $\alpha \cdot \beta < 0$.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β,
αν $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, τότε ισοδύναμα ισχύει ότι $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

γ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β,
αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

δ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β,x,
αν $x \in [\alpha,\beta)$, τότε $\alpha < x \leq \beta$.

ε) Για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β και οποιονδήποτε θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$.

5. Δίνεται η παράσταση $A = \alpha^2 + 4\alpha + 4$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i)** $A \geq 0$, **ii)** $A \geq 2\alpha + 3$.

β) Να υπολογίσετε το α, αν $A + \left[(\alpha-2)(\alpha+2)\right]^2 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{A}{\alpha+2} > \alpha + 1$ για κάθε $\alpha \neq -2$.

6. Αν α,β,γ θετικοί αριθμοί, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ και $\gamma > \alpha$, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta} > 2$ **β)** $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$

γ) $\alpha^2 - \alpha\gamma < \beta(\alpha-\gamma)$ **δ)** $(\alpha+\beta)\frac{1}{\gamma} < 2$.

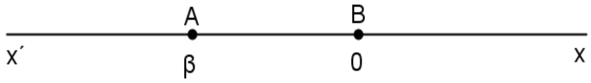
7. Αν α,β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2 > 0$ **β)** $(\alpha+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta) + 1 \geq 0$

γ) $\alpha^2 > \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^4 > \beta^4$ **δ)** $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$.

8. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Στο διπλανό σχήμα η απόσταση ΑΒ ισούται με β, όπου $\beta \in \Re$ η τετμημένη του σημείου Α.



β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \Re$ με $\beta > \alpha$, ισχύει ότι $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$.

γ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \Re$,ισχύει ότι $|\alpha + \beta| > |\alpha| + |\beta|$.

δ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \Re$ ισχύει ότι $d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|$.

ε) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x, x_0, \rho \in \Re$ με $\rho > 0$ ισχύει ότι $d(x, x_0) < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$.

9. Αν $-1 < x < 3$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $|3 - x| + |x + 1| = 4$ **β)** $\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| = \dfrac{3-x}{x+1}$

γ) $|x - 4| + |x + 1| = 5$ **δ)** $|(3 - x)(x + 1)| = -x^2 + 2x + 3$.

10. Αν $x \in \Re$ με $d(x, 1) < 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $-1 < x < 3$. **β)** $|x - 4| < |x - 5|$

γ) $\left|\dfrac{x}{3} + \dfrac{2x+4}{6}\right| = \dfrac{2x+2}{3}$ **δ)** $-2 < 3x + 1 < 10$.

11. Έστω $\alpha, \beta \in \Re$ με $0 < \alpha < \alpha\beta < 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|1 - \beta| = \beta - 1$ **β)** $|\alpha(\alpha - \beta)| = \alpha\beta - \alpha^2$

γ) $\alpha\beta - \alpha\beta^2 < 0$ **δ)** $|\alpha^2\beta - \alpha| = \alpha(1 - \alpha\beta)$.

12. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x με $x<1$ ισχύει $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$.

β) Αν ν, ρ οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι και α οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$.

γ) Ισχύει ότι $\sqrt{10^3}\cdot\sqrt[3]{10}=\sqrt[6]{10^5}$.

δ) Ισχύει ότι $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

ε) Ισχύει ότι $\dfrac{5\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=15$.

13. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

β) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}=3\sqrt{2}$.

γ) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)=-4$.

δ) $\dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{98}}{\sqrt{162}+\sqrt{18}}=1$.

ε) $\sqrt[3]{2^4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt[6]{2^5}$.

14. Θεωρούμε την παράσταση $A=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{1+2x+x^2}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A=|x-3|+|x+1|$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A για $x=-2$.

γ) Αν $0\le x\le 2$, να αποδείξετε ότι:

i) $A=4$

ii) $\sqrt[3]{A}<\sqrt{\dfrac{A}{2}+1}$.

15. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Η εξίσωση $\lambda x = \lambda - 1$ με παράμετρο είναι αδύνατη, αν $\lambda = 0$.

β) Η εξίσωση $|2x-1| = x$ έχει λύση, αν $x < 0$.

γ) Η εξίσωση $|2x-1| = |x-3|$ έχει δύο λύσεις.

δ) Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι ταυτότητα, αν $\alpha = \beta = 0$.

ε) Οι αριθμοί $2x-1$ και $-x+2$ είναι αντίθετοι, αν $x = -1$.

16. Δίνονται δύο προϊόντα Α, Β.

α) Αν το προϊόν Α πουληθεί με έκπτωση 15%, τότε η τιμή του διαμορφώνεται στα 42,5 €.
Ποια είναι η αρχική τιμή του προϊόντος Α;

β) Αν το προϊόν Β επιβαρυνθεί με φόρο 10%, τότε πωλείται 71,5 €.
Ποια είναι η αρχική τιμή του προϊόντος Β;

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-1| = 3x-2$ **β)** $|2|x|-1| = 4$

γ) $|x-1| = -|2x-2|$ **δ)** $|x+3| = -2$

ε) $|x+3| = |3x+1|$ **στ)** $\dfrac{-x}{x+1} = \dfrac{x-x^2}{x^2-1}$

ζ) $|x-1| \cdot |x+3| = |x-1|$ **η)** $\dfrac{|x-2|}{3} + \dfrac{|2x-4|}{2} = \dfrac{4}{3}$

θ) $\sqrt{x^2+4x+4} = |x-1|$ **ι)** $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$.

18. Δίνονται $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ με $\alpha < \beta < \gamma < 0$.

α) Να γραφεί η παράσταση $A = |\beta - \alpha| + |\alpha - \gamma| + |\beta - \gamma|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{|\alpha - \beta|}{\alpha - \beta} + \frac{\gamma - \beta}{|\beta - \gamma|} + \frac{|\alpha - \gamma| \cdot \left(2\alpha^2 + 2\gamma\alpha\right)}{\alpha^3 - \gamma^2\alpha} = -2$.

γ) Αν ισχύει ότι $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \gamma)$, να αποδείξετε ότι $\alpha - 2\beta + \gamma = 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\alpha + 3\beta - 2\gamma \neq 0$ και να υπολογίσετε την τιμή του x, ώστε $|\alpha + \beta| \cdot x + 2|\beta - \gamma| \cdot x = 2\alpha + 6\beta - 4\gamma$.

19. Δύο κινητά κινούνται με την ίδια φορά πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ sec απέχουν 240m. Το ένα κινητό πλησιάζει το άλλο και το φτάνει έπειτα από χρόνο t sec. Αν οι ταχύτητες των δύο κινητών είναι 40 m/sec και 30 m/sec, να βρείτε την απόσταση του σημείου συνάντησης από τις αρχικές θέσεις των δύο κινητών.

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 - 16x^7 = 0$

β) $(x-1)^6 + 27(x-1)^3 = 0$

γ) $(2x+1)^3 = -64$

δ) $\left(x^3 + 8\right)^4 = -35\left(-x^3 - 8\right)^3$.

21. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Η εξίσωση $x^2 - 2x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \in \Re$, έχει μία διπλή ρίζα, αν $\alpha = 4$.

β) Μία εξίσωση 2ου βαθμού με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο ριζών 5 είναι η $x^2 - 3x + 5 = 0$.

γ) Η εξίσωση $x^2 + \alpha x - 3 = 0$, με παράμετρο $\alpha \in \Re$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \alpha^2 = 0$, με παράμετρο $\alpha \in \Re - \{0\}$, δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ε) Μία λύση της εξίσωσης $x + \frac{\beta}{x} = -\beta - 1$ με παράμετρο $\beta \in \Re - \{0\}$, είναι η $x = -\beta$.

22. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - \sqrt{3} \cdot x - 2|\alpha| - 4 = 0$, $\alpha \in \Re$, (1), η οποία έχει γινόμενο ριζών ίσο με -6.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ ή $\alpha = -1$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1).

γ) Να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

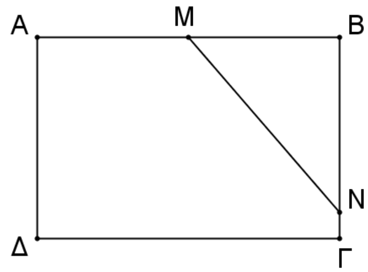
23. Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει πραγματικές ρίζες. Υπάρχουν τιμές των παραμέτρων α, β, γ, ώστε οι ρίζες αυτές να είναι διπλές ;

α) $x^2 + \alpha x - 1 - \alpha = 0$

β) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

γ) $x^2 + \gamma x - 2\gamma^2 = 0$.

24. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με (ΑΒ)= $(x+5)$ m, (ΒΓ)= $(x+1)$m και (ΝΓ)= 1m. Αν Μ μέσο του ΑΒ και το εμβαδόν του πενταγώνου ΑΜΝΓΔ είναι 75m^2, να υπολογίσετε το μήκος x.



25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$

β) $(x+1)^2 - |x+1| - 2 = 0$

γ) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2 = 0$

δ) $\left(x^2 + x\right)^2 - \left(x^2 + x\right) - 2 = 0$

ε) $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

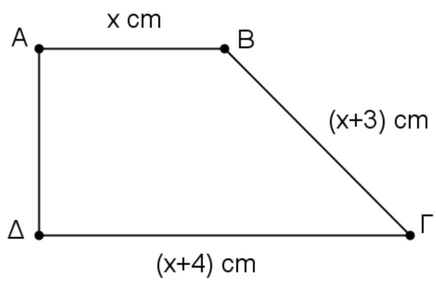
26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x+2}{x^2+x} = \dfrac{x}{x+1}$

β) $x + \dfrac{2}{\alpha} = \alpha + \dfrac{2}{x}$, $\alpha \in \Re - \{0\}$

γ) $\alpha x + \dfrac{\beta}{x} - 1 = \alpha\beta$, $\beta \in \Re - \{0\}$.

27. Η περίμετρος του ορθογωνίου τραπεζίου ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι 16cm. Να υπολογίσετε το ύψος του ΑΔ , αν το εμβαδόν του είναι 12cm^2.



28. Δίνονται τρεις διαδοχικοί ακέραιοι α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma < 0$.

α) Αν $\beta = x$, να εκφράσετε τους ακεραίους α, γ συναρτήσει του x.

β) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των α, β, γ είναι ίσο με 14 , να υπολογίσετε τους τρεις αριθμούς α, β, γ .

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

29. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $2x \geq 4$ και $3x \leq -6$ είναι $-2 \leq x \leq 2$.

β) Η ανίσωση $|x+1| > -3$ λύνεται εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|x| > \theta$.

γ) Η ανίσωση $|x+1| < -4$ είναι αδύνατη.

δ) Η ανίσωση $x > x-1$ είναι ταυτότητα.

ε) Αν $1 \leq x+1 \leq 3$, τότε $x \in [0,2]$.

30. Δίνονται οι ανισώσεις:

$2(x-1) - 4x > -2(x+3)$ (1)

$3(x-2) \geq 4(x-2) + 3x - 6$ (2)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

β) Να λύσετε την ανίσωση (2).

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

31. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $|x-2| = 3x-2$

β) **i)** Να λύσετε την εξίσωση: $|x+1| = x+\alpha$, $\alpha \in \Re - \{1\}$ (1)

ii) Για ποιες τιμές του α έχει λύση x η εξίσωση (1);

32. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\dfrac{|x-1|-2}{2} + 1 < \dfrac{3|x-1|-2}{4}$

β) $\sqrt{x^2+4x+4} \leq 1$

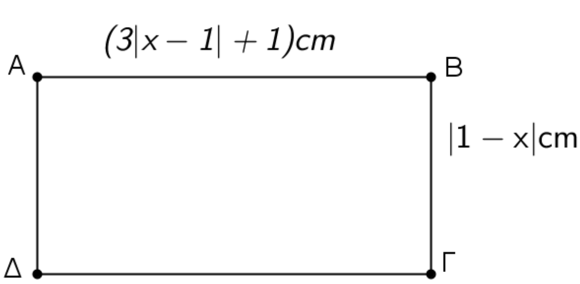
γ) $3 \leq 2x - 1 < 5$

δ) $1 < |2x-1| \leq 5$

33. Η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου του σχήματος είναι μεγαλύτερη των 10cm.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές του x.

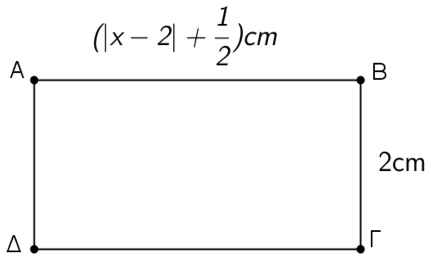
β) Να αποδείξετε ότι $AB + 2B\Gamma > 6\text{cm}$.



34. Η ανίσωση $|x-x_0|\geq \rho$, $\rho>0$ έχει λύσεις $x\in(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$.

Να υπολογίσετε τους x_0 και ρ.

35. Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου του σχήματος είναι μεταξύ των $3cm^2$ και των $7cm^2$. Να υπολογίσετε τις τιμές που παίρνει ο θετικός πραγματικός αριθμός x.



Α Ν Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ 2^{ου} Β Α Θ Μ Ο Υ

36. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει μία ρίζα διπλή,

τότε ισχύει $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, $\alpha\neq 0$.

β) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει ρίζες $x_1,x_2\in\Re$ και το τριώνυμο

$\alpha x^2+\delta x+\varepsilon$ έχει ρίζες $x_1,x_3\in\Re$, τότε $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha x^2+\delta x+\varepsilon}=\frac{x-x_2}{x-x_3}$,

όπου $\alpha\in\Re-\{0\}$ και $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\Re$.

γ) Δίνεται το τριώνυμο $-2x^2+\beta x+\gamma$, ώστε $\beta^2+8\gamma<0$.

Τότε ισχύει $-2x^2+\beta x+\gamma>0$ για κάθε $x\in\Re$.

δ) Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ έχει δύο ρίζες x_1,x_2 πραγματικές και άνισες με $x_1<x_2$. Τότε ισχύει ότι $x^2+\beta x+\gamma\leq 0$ αν $x\in[x_1,x_2]$.

ε) Το τριώνυμο $-3x^2+\beta x+\gamma$ είναι θετικό για κάθε $x\in(-1,4)$ μόνο. Τότε έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 4 και έχει αρνητικές τιμές για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$.

37. Να γράψετε τις εξισώσεις-ανισώσεις ή τα συστήματα εξισώσεων - ανισώσεων που προκύπτουν από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$, $\alpha\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$.

β) $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$, $\alpha\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$.

γ) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, έχει σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\Re$.

δ) $\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0$, $\alpha\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$.

ε) $\alpha x^2+\beta x+\gamma\geq 0$, $\alpha\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$.

στ) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές, όταν $x\in\Re$.

ζ) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, έχει μία ρίζα διπλή και είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το 0 για κάθε $x\in\Re$.

η) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, έχει μία ρίζα διπλή θετική και είναι μικρότερο ή ίσο από το 0 για κάθε $x\in\Re$.

θ) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, είναι αρνητικό στο διάστημα (x_1,x_2), όπου x_1,x_2 οι πραγματικές ρίζες του τριωνύμου.

ι) Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, έχει δύο ρίζες x_1,x_2 πραγματικές και άνισες με $x_1<x_2$ και είναι αρνητικό για κάθε $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$.

38. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\lambda-1)x+\frac{1}{4}(\lambda^2-\lambda)=0$ (1), $\lambda\in\Re$, η οποία έχει δύο ρίζες x_1,x_2 πραγματικές και άνισες.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ.

β) Για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=3$;

γ) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1,x_2 έχουν θετικό άθροισμα.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $x_1x_2>0$.

ε) Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $\rho_1 = x_1 + x_2$ και $\rho_2 = 1$.

στ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 1 + \frac{\lambda^2}{4x_1x_2} \neq 0$.

ζ) **i)** Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν οι ρίζες της (1) να είναι αντίθετες.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του λ, ώστε οι ρίζες της (1) να είναι αντίστροφες.

η) Για ποιες τιμές του λ η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι η $x_1 = 1$;

39. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \Re - \{1\}$,
ώστε η ανίσωση $(-\lambda + 1)x^2 + \lambda x - \lambda < 0$ να είναι ταυτότητα.

40. **α)** Να αποδείξετε ότι: $\kappa^2 + 2\lambda\kappa + 2\lambda^2 > 0$
για κάθε $\kappa \in \Re \quad \text{και} \quad \lambda \in \Re - \{0\}$.

β) Έστω $\kappa, \lambda \in \Re - \{0\}$. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{\kappa}{\lambda} + 2\frac{\lambda}{\kappa} + 2$$ αν:

i) κ, λ ομόσημοι, **ii)** κ, λ ετερόσημοι.

41. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda x^2 + (3\lambda - 1)x + 2\lambda - 1 = 0$
δεν είναι αδύνατη για κάθε $\lambda \in \Re$.

42. Να υπολογίσετε τις τιμές του $x \in \Re$, ώστε να επαληθεύονται
ταυτόχρονα και οι δύο ανισώσεις: $2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad \text{και} \quad x(x-2) < 0$.

43. Έστω ότι $d(\lambda,1) < 1$ (1) με λ πραγματικό αριθμό.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda + 1)x + \frac{1}{4}(\lambda + 1) = 0$ (2)
έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Υπάρχουν τιμές του λ που να ικανοποιούν την (1) και
να ισχύει $\frac{1}{4x_1} + \frac{1}{4x_2} + 2\lambda \geq 0$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (2) ;

44. Θεωρούμε το τριώνυμο $T = x^2 - (\alpha+1)x + \alpha$, $\alpha \in \Re$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του T συναρτήσει του α.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{T}{x^2-1}$.

γ) Υπάρχει $\alpha \in \Re$, ώστε $\dfrac{T}{x^2-1} = 1$;

δ) Έστω Δ η διακρίνουσα του αρχικού τριωνύμου T.
Έχει ρίζες πραγματικές ένα άλλο τριώνυμο T' με διακρίνουσα $\Delta' = -\Delta - 1$;

ε) Για ποια τιμή του α το τριώνυμο $T = x^2 - (\alpha+1)x + \alpha$ έχει δύο ρίζες άνισες, που το τετράγωνο της μιας ισούται με τη δεύτερη, που έχει θετική τιμή;

45. Έστω $\alpha < 0 < \beta$.

α) Να γραφεί η παράσταση: $A = -|\alpha-\beta| + |\alpha^2-\alpha| + |\beta^2+\beta| + |\alpha^2| - |\beta^2|$ χωρίς απόλυτα.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|2 - \dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\beta}{\alpha}\right| x \geq \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{2\alpha\beta}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\big|-|\alpha| - |\beta|\big| x^2 = 9\beta - 9\alpha$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{|\alpha-\beta|}{\alpha-\beta} - \dfrac{|2\alpha^2-2\alpha|}{\alpha(\alpha-1)} + \dfrac{\alpha^2+2}{|\alpha^2+2|} = -2$.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $d(\alpha,\beta)\cdot d(x,1) = \beta - \alpha$ έχει λύσεις τις $x = 0$ και $x = 2$.

στ) Αν επιπλέον $|\alpha| < |\beta|$ και $\alpha < \gamma < 0$, να αποδείξετε ότι: $d(\alpha,\gamma) < d(\gamma,\beta)$.

ζ) Να υπολογίσετε το x αν $|\alpha-1|\cdot|\beta+1|\cdot x = |\alpha\beta + \alpha - \beta - 1|$.

η) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + \sqrt{\beta}\cdot x + \dfrac{1}{4}\alpha = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

θ) Να αποδείξετε ότι $x^2 - (\alpha+\beta)\cdot x + \alpha\beta > 0$ για κάθε $x > \beta$ ή $x < \alpha$.

Α Ρ Ι Θ Μ Η Τ Ι Κ Η Π Ρ Ο Ο Δ Ο Σ

46. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1} = 3$ είναι το 3.

β) Ο εκατοστός όρος της αριθμητικής προόδου $0,-1,-2,-3...$ είναι το -99.

γ) Το 2018 είναι όρος της αριθμητικής προόδου $-3,-1,1,3,...$.

δ) Η αριθμητική πρόοδος $1,\sqrt{2}+1,2\sqrt{2}+1,...$ έχει διαφορά ίση με $\sqrt{2}$.

ε) Αν $\alpha_1 < 0$ και $\omega < 0$, τότε ο νιοστός όρος αυτής της αριθμητικής προόδου είναι αρνητικός.

στ) Αν η διαφορά μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι $\omega = -4$, τότε για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει ότι $\alpha_{\nu+2} - \alpha_\nu = -8$.

ζ) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει $\beta+\gamma = \alpha+\delta$.

47. Οι αριθμοί $x, x+2, 2x^2+3$ με $x \in Z$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), ώστε $\alpha_5 = x+2$. Να υπολογίσετε:

α) το x.

β) τον όρο α_{20}.

γ) το άθροισμα $\alpha_4 + \alpha_5 + ... + \alpha_{20}$.

48. Θεωρούμε το άθροισμα $S = x + (x+2) + (x+4) + ...(x+98)$, $x \in \Re$.

α) Πόσους όρους έχει το άθροισμα αυτό;

β) Αν $S = 100$, να υπολογίσετε την τιμή του x.

γ) Αν $x = -40$, να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος.

δ) Αν $-50 \le S < 0$, να υπολογίσετε τις τιμές του x.

49. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = -5$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 - \alpha_1 = \alpha_6 - \alpha_3$.

β) Αν $\alpha_4 + \alpha_3 = 15$ (1), να βρείτε την πρόοδο.

γ) Με την προϋπόθεση ότι ισχύει η (1), να εξετάσετε αν το 200 είναι όρος της προόδου (α_ν)

50. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) της οποίας ο νιοστός όρος δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu = -2\nu + 13$, για κάθε $\nu \in \mathrm{N}^*$.

α) Να βρείτε την τιμή του ω , ώστε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$.

β) Να αποδείξετε ότι η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

γ) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος των ν πρώτων όρων που απαιτούνται , ώστε το άθροισμα $\alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$ να γίνει για πρώτη φορά αρνητικό.

51. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $1, \frac{x-1}{x}, \frac{x-2}{x}, \ldots, \frac{1}{x}$, όπου $x \in \mathrm{N}^*$ και είναι σταθερός αριθμός.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά της προόδου συναρτήσει του x.

β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του x τον 12$^{\text{ο}}$ όρο της προόδου, αν $\alpha_1 = 1$.

γ) Αν $1 + \frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 16$, να υπολογίσετε τη τιμή του x.

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Κ Η   Π Ρ Ο Ο Δ Ο Σ

52. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Η γεωμετρική πρόοδος $x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, \ldots\ x \in \Re^*$ έχει λόγο $\frac{1}{x^2}$.

β) Ο 10$^{\text{ος}}$ όρος της γεωμετρικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha_2 = 2$, είναι $\alpha_{10} = 2^9$.

γ) Ο δέκατος όρος γεωμετρικής προόδου (α_ν), η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 3 \quad \text{και} \quad \alpha_1 = \frac{1}{3^{10}}$, ισούται με 1.

δ) Σε μια γεωμετρική πρόοδο με θετικό λόγο, $\alpha_1 = x > 0 \quad \text{και} \quad \alpha_4 = x^7$, ο πέμπτος όρος είναι ο x^8.

ε) Ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών 1 και 4 είναι μόνο το 2.

53. Δίνεται μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) , ώστε $\alpha_8 = \frac{1}{8}\alpha_5$ και ο τρίτος όρος της είναι 16. Να υπολογίσετε :

α) τον όγδοο όρο της.

β) το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της.

54. Μια μαθήτρια διάβασε ένα εξωσχολικό βιβλίο ως εξής:

$1^{η}$ ημέρα: 1 σελίδα

$2^{η}$ ημέρα: 2 σελίδες

$3^{η}$ ημέρα: 4 σελίδες κ.ο.κ.

α) Να υπολογίσετε πόσες σελίδες έχει διαβάσει την $9^{η}$ ημέρα.

β) Αν η ανάγνωση του βιβλίου ολοκληρώθηκε σε 9 ημέρες, να βρείτε:

i) Πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

ii) Πόσες ακόμη σελίδες είχε ακόμη να διαβάσει η μαθήτρια μετά το τέλος της $6^{ης}$ ημέρας.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

55. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Αν $f(x)=\sqrt{x+1}$, τότε $f(-2)=-1$.

β) Αν $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ 2x-3, & x>1 \end{cases}$, τότε $f(3)=2$.

γ) Αν $f(x)=x^4+3x^2+4$, τότε $f(\sqrt{t})=t^2+3t+4$ για κάθε $t\ge 0$.

δ) Έστω $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$,τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[1,2]$.

56. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{|x-1|-4}+\dfrac{3}{x^2+3x}$.

β) $f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}+\sqrt{\dfrac{1}{|x|}}$.

γ) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+10}+\dfrac{2}{x-|x|}$.

δ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}-2}$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-|x+2|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Αν $\alpha>0$, να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{2f(-2)}{\alpha}\ge f(-1)+\alpha$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(-\frac{3}{2})=\sqrt{2}$.

58. Έστω $f(x)=|2x-1|-|x|$.

α) Να υπολογίσετε τους $f(-2), f(-3)$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\frac{\sqrt{f(-2)+x}}{x^2-f(-3)}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$h(x)=\sqrt{f(x)+|x|-3}+\sqrt{2-x}\,.$$

δ) Αν $x<0$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x^2+1$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

59. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

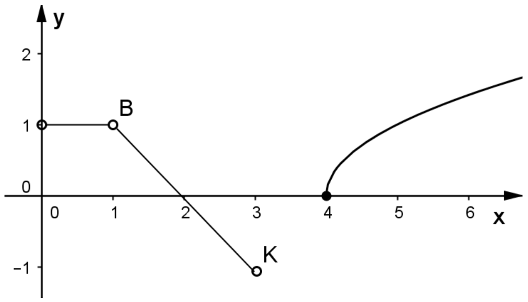
α) Τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,2)$ έχουν άξονα συμμετρίας τον x΄x.

β) Αν τα σημεία $A(\alpha,\beta)$ και $B(8,-3)$ έχουν άξονα συμμετρίας τη διχοτόμο της 1ης - 3ης γωνίας του συστήματος συντεταγμένων, τότε $\alpha=-3$ και $\beta=8$.

γ) Αν η καμπύλη της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$, τότε τα x_1, x_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ και αντίστροφα.

δ) Για να βρω τα x, για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x , λύνω την ανίσωση $f(x)>0$.

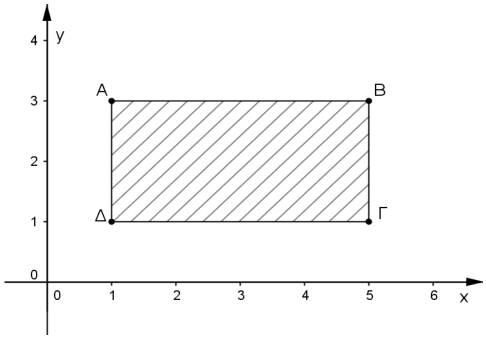
ε)



Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι $A_f=(0,3)\cup[4,+\infty)$

στ) Τα σημεία $A(|x|,-1)$ και $B(-2,1)$ έχουν κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$, αν και μόνο αν $x=2$ ή $x=-2$.

60. Το σημείο $M(x,3-x)$, $x \in Z$, είναι εγκλωβισμένο στην επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ του σχήματος.



Να υπολογίσετε τις τιμές του x.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x΄x και y΄y.

β) Να βρείτε τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g, αν $g(x) = -x^2 + 3x$.

γ) Ποιο είναι το κοινό σημείο των C_f, C_g, όπου g η συνάρτηση του \ (β) ερωτήματος.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x\sqrt{2-x}} + \alpha$, $\alpha \in \Re$.
Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται για κάθε x του πεδίου ορισμού της πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Σε ποιο σημείο η C_f τέμνει τον άξονα y΄y ;

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - 3 = \sqrt{3x}$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε x του πεδίου ορισμού της f η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όπου $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4}$.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x) = αx+β

64. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση $y=\sqrt{3}x+1$ σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα x'x.

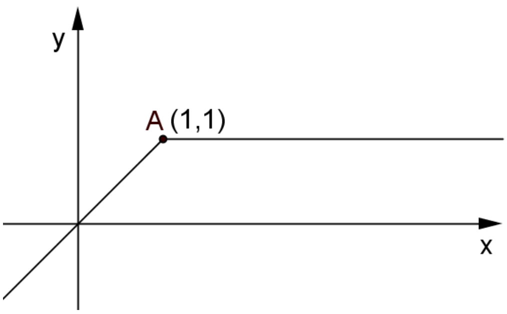
β) Οι ευθείες με εξισώσεις $y=\lambda x-2$, $\lambda\in\Re$, διέρχονται από το σημείο $A(0,2)$.

γ) Η γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, $\alpha<0$, σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x.

δ) Αν η γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση $y=x+1$ διέρχεται από το σημείο $A(1,\alpha)$, τότε $\alpha=3$.

ε) Οι ευθείες με εξισώσεις $y=x+2$ και $y=x-4$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ζ) Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,



έχει τύπο $f(x)=\begin{cases} x, & \alpha\nu \quad x\le 1 \\ 1, & \alpha\nu \quad x>1 \end{cases}$.

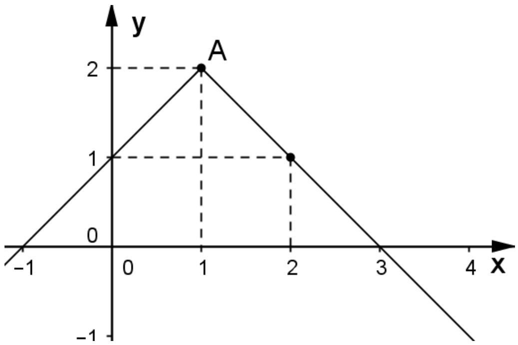
65. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, που η γραφική της παράσταση σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x'x και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

β) Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $M(2\kappa-1,\kappa+1)$, να υπολογίσετε την τιμή του κ.

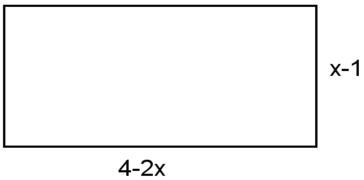
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της (ε).

66.



Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας το γράφημα φαίνεται στο σχήμα.

67.



Το παραπάνω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις $x-1$ και $4-2x$.

α) Ποιες είναι οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή x;

β) Έστω y η περίμετρος του εν λόγω ορθογωνίου. Να βρεθεί η συνάρτηση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ (ε) της περιμέτρου του.

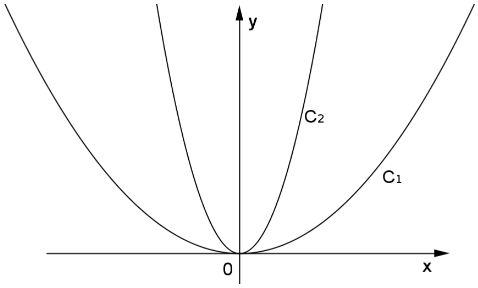
γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) του (β) ερωτήματος.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x^2$ $(\alpha \neq 0)$

68. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$ βρίσκεται στο 1^o και 2^o τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων, τότε ισχύει ότι $\alpha<0$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x^2$ και $g(x)=\frac{1}{4}x^2$ και οι γραφικές τους παραστάσεις C_1 και C_2 που υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα.



Η C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^2$.

γ) Υπάρχει σημείο Μ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=-2x^2$ με συντεταγμένες $M(1,2)$.

δ) Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=-x^2$ $(x\leq 0)$ βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο του συστήματος των συντεταγμένων.

ε) Αν για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$ ισχύει ότι $f(x)\leq 0$, τότε $\alpha<0$.

στ) Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}-3x^2, & x\leq 0\\ 3x^2, & x>0\end{cases}$ βρίσκεται στο 2^o και 4^o τεταρτημόριο του συστήματος συντεταγμένων .

ζ) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ ισχύει ότι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Re$.

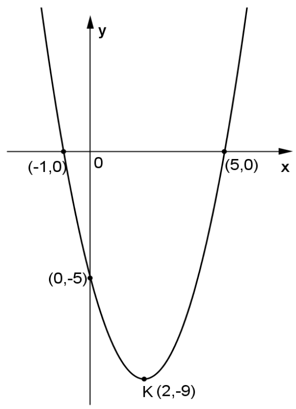
η) Το σημείο $A(-1,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x^2$.

θ) Αν το σημείο $B(1,\alpha+2)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=2x^2$, τότε $\alpha=-2$.

ι) Αν το σημείο $A(\kappa,\lambda)$ ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$ $(\alpha\neq 0)$, τότε και το σημείο $B(\kappa,-\lambda)$ ανήκει σε αυτήν.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq0)$

69.



Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (\alpha \neq 0)$. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) $\alpha < 0$

β) Η ευθεία $x = -9$ είναι άξονας συμμετρίας της καμπύλης.

γ) $\gamma = -5$

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι -1 και 5.

ε) $\frac{\Delta}{4\alpha} = 9$

στ) $f(x) \in [-9, +\infty)$

ζ) Υπάρχει x , ώστε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = -10$.

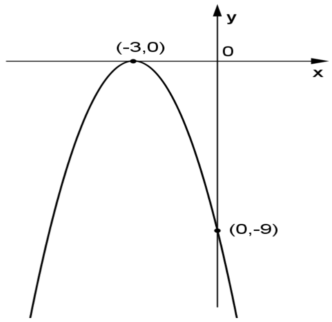
η) Υπάρχουν δύο διαφορετικά x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f , ώστε $f(x) = -9$.

θ) Ισχύει ότι $\alpha = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = -5$.

ι) $f(x) < 0$, όταν $x \notin (-1,5)$.

κ) $\Delta = 0$

70.



Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \ (\alpha\neq 0)$ έχει σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

α) $\dfrac{\beta}{2\alpha}=3$

β) $\Delta\neq 0$

γ) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει μία ρίζα διπλή, την $x=3$.

δ) $\gamma=-9$

ε) $f(x)\in(-\infty,0]$

στ) Η ανίσωση $f(x)>0$ είναι ταυτότητα.

ζ) $\alpha=-1$ **,** $\beta=-6$ και $\gamma=-9$.

η) Ισχύει ότι : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=-(x+3)^2$.

71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\kappa+1)x+\dfrac{3}{4}(\kappa^2+\kappa)$, $(\kappa\in\Re)$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές του κ.

β) Υπάρχουν $\kappa\in\Re$, ώστε $3S^2-4P-3\leq 0$;
(Όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$).

γ) Αν η τετμημένη της κορυφής του γραφήματος της f είναι ίση με -1, να υπολογίσετε την τεταγμένη της κορυφής της.

72. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-3x+\lambda$ και $g(x)=|2x+5|+\mu$ με $\lambda,\mu\in R$.

α) Αν το σημείο Κ(-1,6) ανήκει στη γραφική παράσταση της f και επιπλέον ισχύει $|f(0)-g(0)|=|\mu+5|$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων λ και μ.

β) Αν λ=2 και μ=-4, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία:

i) η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x,

ii) η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+(\lambda+1)x+\lambda$, με $\lambda\in R$. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα διπλή.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>-x^2$ για κάθε $x\in R$.

γ) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=5$, να βρείτε:

i) το άθροισμα x_1+x_2 και το γινόμενο $x_1\cdot x_2$ των δύο ριζών

ii) μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες $\rho_1=x_1+x_2$ και $\rho_2=x_1\cdot x_2$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+(x^2+3x+2)^2=0$ έχει μοναδική λύση την x=-1.

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|2x-1|-|x|$.

α) Να υπολογίσετε τα $f(-1)$, $f(-2)$ και να βρείτε το πεδίου ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(-2)+3x}}{x^2-f(-3)}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=6-|x|-|1-2x|$.

Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της h.

75.

α) Οι αριθμοί $3x$, $4x-1$, x^2+2 είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου α_ν με διαφορά $\omega \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $x=4$.

ii) Αν ο έκτος όρος της α_ν είναι το 3x, να υπολογίσετε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+4x+12}}{x-3}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να αποδείξετε ότι : $f(0)+f(4)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\lambda x+\lambda-2$, $\lambda \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει , για κάθε $\lambda \in \Re$, δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \Re$ για τις οποίες ισχύει $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 3$.

γ) Για λ= 2 , να βρείτε :

i) τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \Re$, ώστε η ανίσωση $f(x)>-2$ να αληθεύει για κάθε $x \in \Re$.

77. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{|2x-1|-7}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $|2x-1|<7$.

δ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον $x'x$.

78. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+1)\cdot x^2-(3\lambda-4)\cdot x+\lambda-7=0$ με $\lambda\neq-1$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda\in\Re$ με $\lambda\neq-1$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να βρεθούν οι τιμές του λ, ώστε $x_1^2+x_2^2>\dfrac{30}{(\lambda+1)^2}$.

γ) Να βρεθεί η τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

79. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\lambda+2)x+(\lambda+5)=0$ με $\lambda\in\Re$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο άνισες ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να εκφράσετε σαν συνάρτηση του λ τις παραστάσεις:

$$A=x_1+x_2 \quad , \quad B=x_1\cdot x_2 \quad , \quad \Gamma=x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2.$$

γ) Να βρείτε το λ, ώστε να ισχύει $x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2+3x_1+3x_2=5$.

80. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{x^2 - x - 2}\right)^2 - \sqrt{|x+1|^4}\right]$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι : $A_f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f, αν απλοποιηθεί, γράφεται: $f(x) = x + 1$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = (x-1) \cdot f(x)$ με τον άξονα $x'x$ του συστήματος συντεταγμένων.

δ) Να βρείτε το συμμετρικό σημείο A', του σημείου $A(-2,3)$ ως προς τον άξονα $y'y$ και να δείξετε ότι το A' ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g του (γ) ερωτήματος.

81. Έστω ότι ο πραγματικός αριθμός κ αποτελεί λύση της ανίσωσης $\kappa^2 - 4\kappa - 12 < 0$ (1) . Να αποδείξετε ότι:

α) $-2 < \kappa < 6$ **.**

β) Η ανίσωση (1) έχει τις ίδιες λύσεις με την ανίσωση $d(k,2) < 4$.

γ) Η εξίσωση $x^2 + x + \frac{1}{4}(\kappa - 6) = 0$ έχει δύο λύσεις x_1, x_2,πραγματικές και άνισες, για τις οποίες ισχύει $8x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 \neq -20$.

δ) Η εξίσωση $|\kappa+2| \cdot |\kappa-6| + |\kappa^2 - 2\kappa + 2| + \kappa^2 = 10\kappa + 7$ έχει μόνο μία λύση .